

一种基于全相位双正交三次 U 变换的 JPEG 编码的新算法^{*}

熊刚强^{1,2,*} 齐东旭^{2,3} 郭芬红^{2,4}

1. 广东医学院数学与计算机科学教研室, 东莞 523808; 2. 中山大学信息科学学院, 广州 510275; 3. 澳门科技大学资讯科技学院 澳门; 4. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510090

摘要 U 正交函数系有良好的数据逼近性能, 而全相位数字滤波器具有零相位特性, 文中把二者结合起来, 构造出了基于三次 U 系统的全相位双正交 U 变换 (APBUT3, All Phase Bi-orthogonal U Transform Based on 3-Degree U System), 用 APBUT3 矩阵作为列率变换矩阵代替离散余弦变换 (DCT, Discrete Cosine Transform) 对图像进行变换编码, 提出了基于 APBUT3 的图像编码算法. 由于 APBUT3 能有效地抑制图像的高频成分, 编码时, 可以用均匀的量化间隔对变换系数进行量化, 也可以预处理变换矩阵代替编码的量化过程, 简化了图像编码. 该算法与 DCT 对比, 当码率较大时, 其编码效果与 DCT 基本相同; 当码率较小时, 用 16×16 的 APBUT3 编码的方块效应没有 DCT 明显, 用均值滤波器对块边界像素进行平滑处理后, 其方块效应可以基本消除.

关键词 三次 U 系统 全相位双正交 U 变换 离散余弦变换 JPEG 图像编码

在图像、视频编码标准中, 基于 DCT 的变换编码是一种应用非常广泛的图像编码技术, 如 JPEG, MPEG, H. 261, H. 263 都是基于 DCT 的图像编码标准^[1]. 在典型的 DCT 压缩方案中, 首先把输入图像进行分块 (一般分为 8×8 的子图像块), 然后, 对子图像实施 DCT 变换, 再对 DCT 变换域中系数进行标量量化、熵编码, 由于变换域的能量高度集中在少数的变换系数上, 因此通过非均匀的标量量化即可达到压缩图像的目的. 在图像编码和图像重建时, 基于 DCT 的编码技术主要存在两个方面的问题: (1) 量化过程复杂, 量化表不易设计. DCT 变换域中的高频系数的幅度值一般都比较小, 且高频分量对人类视觉不太敏感, 因而, 量化过程中往往采用粗量化策略进行量化; 而对低频系数采用细量化, 在 DCT 编码过程中, 一般采用 JPEG 标准所推荐的 8×8 的标准量化矩阵 (量化表) 进行量

化. 有时, 需要针对不同的图像构造不同的量化表, 但是, 构造量化表或设计量化方案并不是一件很容易的事情, 而且构造过程一般比较复杂^[2-4]. (2) 低码率下重建图像的方块效应明显, 处理过程复杂. 用分块 DCT 对图像进行编码压缩, 当码率较大时, 图像重建效果一般可以为人类视觉所接受, 但码率较小时, 重建图像会出现较为明显的方块效应. 而除掉方块效应的方法一般有两种: 后处理^[1,5,6] 与前处理^[7,8], 两种处理方式都比较复杂, 特别是后处理方式, 常常需要判断边界部分与非边界部分, 因此, 消除低码率下的方块效应是一件复杂而不易实现的工作. 另外, 码率很低时, 用后处理方式也很难消除重建图像的方块效应.

针对上述的两个问题, 首先, 引入一类新的正交函数系, 即 U 系统. U 系统是齐东旭与冯玉瑜于 1983—1984 年提出的一组完备的正交函数系, 该函

2008-08-11 收稿, 2008-10-22 收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10631080)、国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2004CB318000) 和澳门科学发展基金 (045/2006/A) 资助项目

** E-mail: xiongqg@yahoo.cn

数系由分段多项式函数构成, 它既有连续的基函数又有间断的基函数, 且列率是逐渐递增的^[9-11]. 2005 年宋瑞霞在 U 系统的基础上构造了另一组正交函数系, 称之为 V 系统^[12], 用 U 系统、V 系统可以精确地表达一类具有强间断性的非连续的模拟信号, 可以克服 Fourier 三角基函数表示非连续信号所出现的 Gibbs 现象, 并且在数字几何与图像处理的应用中取得了成功的应用^[13-16]. 由 U 系统和 V 系统可以构造一类新的正交变换——U 正交变换和 V 正交变换, 应用 U 正交变换和 V 正交变换可以对信号和图像进行处理与分析^[17-21]. 其次, 我们利用全相位数字滤波器的设计方法, 构造基于三次 U 系统的全相位双正交 U 变换(APBUT3). 全相位数字滤波器是由侯正信在 1999—2003 年提出的一种新的数字滤波器^[22, 23], 用全相位数字滤波器的设计方法可以构造出一类双正交变换, 并在图像编码的应用中取得了成功的应用^[24-26], 由文献 [24—26] 可以看出, 基于全相位双正交变换的图像编码方法可以简化图像编码的量化过程.

本文的目的在于: 结合 U 系统的良好数据逼近性能与全相位数字滤波器的零相位特性, 构造基于 APBUT3 的图像编码算法, 力求新算法能够简化变换系数的量化过程; 同时, 在高压缩比的情况下, 用新算法重建图像的方块效应不会太明显, 并且容易消除. 新算法的核心是用 APBUT3 代替 DCT 对图像进行变换编码.

1 U 系统及其性质

1.1 U 系统的构造

K 次 U 系统是由 $[0, 1]$ 区间上的 K 次 Legendre 多项式构造出来的 K 次分段多项式正交函数系^[15], 下面考虑 K 次 U 系统的构造过程.

(1) 取区间 $[0, 1]$ 上的前 $K+1$ 个 Legendre 多项式, 记为 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_K(x)$.

(2) 构造 U 系统的生成元函数.

有限函数集合 $\{\psi(x), \psi(x), \dots, \psi(x)\}$ 是 U 系统的函数生成元, 如果 $\psi(x), j=0, 1, \dots, K$ 满足如下条件:

(i) $\psi(x)$ 是以 $x=\frac{1}{2}$ 为分段点的 K 次分段多项式;

(ii) $\langle \psi(x), \psi(x) \rangle = \delta_j, i, j=0, 1, \dots, K;$

(iii) $\langle \psi(x), x^i \rangle = 0, i, j=0, 1, \dots, K,$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $L^2[0, 1]$ 中的内积,

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases};$$

(iv) $\psi_j(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称, $\psi_{j+1}(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 反对称, $j=0, 1, \dots, \left[\frac{K}{2}\right]$, 其中 $[\]$ 表示取整运算.

因此, 用简单的待定系数法可以解出 $\psi_j(x), j=0, 1, \dots, K$ 的具体表达式.

(3) 由生成元函数迭代生成 U 系统的其他正交函数.

为了方便

记 $\psi^{(0)}(x) \triangleq \{\psi(x), \psi(x), \dots, \psi(x)\},$
 $\psi^{(j)}(x) \triangleq \{\psi_j(x), \psi(x), \dots, \psi_{(K+1)2^j-1}(x)\},$ 其中 $\psi^{(j)}(x)$ 中函数成员由下式迭代生成,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_n^{-1}(2x), & 0 \leq x < 1/2 \\ \psi_n^{-1}(2-2x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$\psi_{n+1}(x) = \begin{cases} \psi_n^{-1}(2x), & 0 \leq x < 1/2 \\ -\psi_n^{-1}(2-2x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$n = 0, 1, \dots, (K+1)2^j - 1.$$

那么称函数集合

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_K(x)\} \bigcup_{j \in \{0, 1, 2, \dots\}} \psi^{(j)}(x) \quad (1)$$

为 K 次 U 正交函数系, 简称 K 次 U 系统. 特别地, 零次 U 系统就是 Walsh 正交函数系, 一次 U 系统就是离散 Slant 变换的解析表达形式. 当 $K=3$ 时, 有

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{3}(1-2x),$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1),$$

$$\varphi_3(x) = \sqrt{7}(-20x^3+30x^2-12x+1),$$

其中 $x \in [0, 1];$

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{7}(-64x^3+66x^2-18x+1), & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{7}(-64(1-x)^3+66(1-x)^2-18(1-x)+1), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{5}(-140x^3 + 114x^2 - 24x + 1), & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{5}(140(1-x)^3 - 114(1-x)^2 + 24(1-x) - 1), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(-224x^3 + 156x^2 - 28x + 1), & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{3}(-224(1-x)^3 + 156(1-x)^2 - 28(1-x) + 1), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} -280x^3 + 180x^2 - 30x + 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ 280(1-x)^3 - 180(1-x)^2 + 30(1-x) - 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases};$$

函数集合 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$
 $\bigcup_{j \in \{0,1,2,\dots\}} \{\psi_j(x), \phi_j(x), \dots, \psi_{2^j-1}(x)\}$ 是三次 U 系统. 图 1 给出了三次 U 系统的前 32 个基函数的图形.

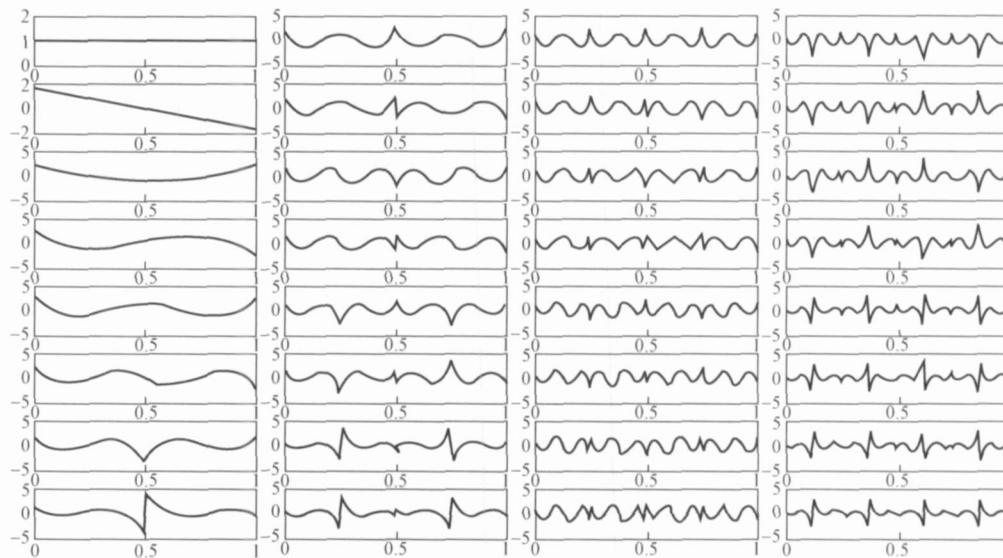


图 1 三次 U 系统的前 32 个正交基函数

1.2 U 系统的性质

记 $u_n(x)$ 是 K 次 U 系统中的第 $n+1$ 个基函数, 在 K 次 U 系统中, 其基函数按 (1) 式中 j 的值从小到大排列, 那么, K 次 U 系统有如下性质.

性质 1: K 次 U 系统是 $L^2 [0, 1]$ 中的规范正交函数系, 即 $\langle u_i(x), u_j(x) \rangle = \delta_{ij}$.

记 $b_n \triangleq \langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x)u_n(x)dx, n = 0, 1, \dots$; 则

称 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n u_n$ 为 f 的 Fourier-U 级数, $S_f(n) \triangleq \sum_{j=0}^n b_j u_j$ 表示 f 的 Fourier-U 级数的前 $n+1$ 项之和, 那么 $S_f(n)$ 满足性质 2.

性质 2^[9,11]: Fourier-U 收敛性, 即对给定函数 $f \in L^2 [0, 1]$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_f(n)\|_2 = 0$

性质 3: 列率递增性, 即 U 系统的基函数的变号数是逐渐递增.

1.3 离散 U 正交变换

假设 $y=f(x)$ 是连续的时间信号, 在单位时间内, 等间隔地对 $f(x)$ 进行 $N=2^m$ 次抽样 (其中 m 为任意正整数), 得到一维离散信号 $\{f(x_i); i=0, 1, \dots, N-1, x_i \in [0, 1]\}$, 为了方便起见, 记 $f(i) \triangleq f(x_i), u(n, i) \triangleq u_n(x_i), f \triangleq \{f(0), f(1), \dots, f(N-1)\}^T$, 且 $F \triangleq \{F(0), F(1), \dots, F(N-1)\}^T$ 是与 f 对应的离散点列, 那么, 称 $F=Uf$ 为离散 U 正交变换

其中,

$$U \triangleq \begin{pmatrix} u(0,0) & u(0,1) & \dots & u(0,N-1) \\ u(1,0) & u(1,1) & \dots & u(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(N-1,0) & u(N-1,1) & \dots & u(N-1,N-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

是对应于 U 正交变换的离散正交矩阵. 当 $K=0, 1$ 时, U_0 就是 Walsh 变换矩阵, U_1 就是离散 Slant 变换矩阵. 但是, 三次 U 系统的基函数等间隔离散化之后, 所得到的矩阵只是近似正交矩阵, 用下面方法可以计算出三次 U 系统的正交矩阵.

(i) 把区间 $[0, 1]$ 均匀划分成 $N=2^m$ 个区间;

$$U_3 \triangleq \begin{pmatrix} 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \\ 0.5401 & 0.3858 & 0.2315 & 0.0772 & -0.0772 & -0.2315 & -0.3858 & -0.5401 \\ 0.5401 & 0.0772 & -0.2315 & -0.3858 & -0.3858 & -0.2315 & 0.0772 & 0.5415 \\ 0.4308 & -0.3077 & -0.4308 & -0.1846 & 0.1846 & 0.4308 & 0.3077 & -0.4308 \\ 0.2749 & -0.4922 & -0.1730 & 0.3902 & 0.3902 & -0.1730 & -0.4922 & 0.2749 \\ 0.1358 & -0.4253 & 0.2253 & 0.4999 & -0.4999 & -0.2253 & 0.4253 & -0.1358 \\ 0.0881 & -0.3561 & 0.5399 & -0.2719 & -0.2719 & 0.5399 & -0.3561 & 0.0881 \\ 0.0655 & -0.2750 & 0.4583 & -0.4583 & 0.4583 & -0.4583 & 0.2750 & -0.0655 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2 基于三次 U 系统的全相位双正交 U 变换

2.1 正交变换的列率滤波器构造

设 U 是任意正交变换, $X \triangleq \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}^T$ 是离散时间序列中某一段长度为 $N=2^L$ 的子序列 (L 为任意正整数), $Y \triangleq \{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}^T$ 是对应于 X 的滤波输出向量, 那么 U 正交变换的列率滤波器可由下式表示^[23]

$$Y = U^T \{F \circ UX\} \quad (4)$$

其中 F 是长度为 N 的列率响应向量, “ \circ ” 表示两向量对应元素相乘, 即 $F \circ UX$ 表示向量 F 与向量 UX 对应元素做乘积运算后的向量. 直接计算(4)式, 有

$$y(n) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} u(i, n) u(i, j) F(i) \right] x(j) = \sum_{j=0}^{N-1} H(n, j) x(j), \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

其中,

$$H(n, j) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} [u(i, n) u(i, j) F(i)], \quad (5)$$

称矩阵 $H \triangleq \{H(i, j)\}_{i,j=0}^{N-1}$ 为列率滤波矩阵, 因此, 有 $Y = HX$.

对于时间序列中某一固定的点 $x(n)$, 考虑所有

(ii) 取每个小区间的中点函数值构成离散矩阵, 该矩阵只是近似正交的.

(iii) 用 Gram-Schmidt 方法对 (ii) 所得到的矩阵进行标准正交化, 这样便可以得到 (2) 式中 U 变换的离散正交矩阵. 当 $N=8$ 时, 三次 U 变换的正交矩阵 U_3 为:

包含点 $x(n)$ 、长度为 N 的子序列:

$$X_m = \{x(n-N+m+1), x(n-N+m+2), \dots, x(n+m)\}^T, \quad m = 0, 1, \dots, N-1;$$

对每个子序列进行列率滤波, 计算点 $x(n)$ 的响应输出, 然后将这 N 个输出值的平均值作为 $x(n)$ 的全相位滤波输出 $y(n)$, 可以得到^[23]:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} H(i, j) x(n-i+j) = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} h(j) x(n-j), \quad (6)$$

其中,

$$h(j) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=j}^{N-1} H(i, i-j), & j = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1+j} H(i, i-j), & j = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad (7)$$

由(6)式可以看出: (7)式所定义的离散序列 $\{h(n)\}_{n=-N+1}^{N-1}$ 就是全相位列率滤波器的单位脉冲响应, 如果列率滤波矩阵 H 是对称矩阵, 那么 $h(n) = h(-n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$, 即滤波器 $\{h(n)\}_{n=-N+1}^{N-1}$ 具有零相位特性. 并且由(5)式, 我们可得到结论:

正交变换的列率滤波矩阵为对称矩阵, 由正交

变换所构造的全相位列率滤波器 $\{h(n)\}_{n=-N+1}^{N-1}$ 是零相位数字滤波器。

2.2 基于三次 U 系统的全相位双正交 U 变换

由上面的讨论可以知道, 由三次 U 正交变换所构造的列率滤波器 $\{h(n)\}_{n=-N+1}^{N-1}$ 是对称的, 因而可以由 $\bar{h} \triangleq \{h(0), h(1), \dots, (N-1)\}^T$ 得到 $\{h(n)\}_{n=-N+1}^{N-1}$. 由(7)式与(5)式, 有

$$h(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=j}^{N-1} u(k, i) u(k, i-j) \right] F(k) = \sum_{k=0}^{N-1} a(j, k) F(k),$$

其中

$$a(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{i=j}^{N-1} u(k, i) u(k, i-j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1-j} u(k, i+j) u(k, i). \quad (8)$$

记矩阵 $A \triangleq \{a(j, k)\}_{j, k=0}^{N-1}$, 则 $\bar{h} = AF$, 即 A 为列率滤波向量到全相位 U 变换的变换矩阵, 当 $N=8$ 时, 由(8)式可以计算出三次 U 系统的全相位变换的变换矩阵 A_3 , 即

$$A_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8750 & 0.6250 & 0.3750 & 0.1250 & -0.0831 & -0.3318 & -0.6669 & -0.9182 \\ 0.7500 & 0.2738 & -0.1310 & -0.4167 & -0.6142 & -0.5893 & -0.0048 & 0.7322 \\ 0.6250 & -0.0298 & -0.4226 & -0.4583 & -0.1369 & 0.5102 & 0.4373 & -0.5221 \\ 0.5000 & -0.2619 & -0.4524 & -0.1061 & 0.3848 & 0.0559 & -0.4324 & 0.3121 \\ 0.3750 & -0.3988 & -0.2440 & 0.2765 & 0.1471 & -0.2421 & 0.2219 & -0.1356 \\ 0.2500 & -0.4167 & 0.0833 & 0.2652 & -0.2706 & 0.1155 & -0.0627 & 0.0360 \\ 0.1250 & -0.2917 & 0.2917 & -0.1856 & 0.0756 & -0.0184 & 0.0078 & -0.0043 \end{pmatrix} \quad (9)$$

定义 1: 由(8)式所确定的三次 U 系统的全相位变换矩阵, 称之为 APBUT3 矩阵, 当 $N=8$ 时, APBUT3 矩阵 A_3 由(9)式给出。

由(8)式可以证明 A_3 是可逆矩阵, 记 A_3 的逆矩阵为 A_3^{-1} , 设 x, y 是相同维数的离散点列, 且满足下面的关系:

$$y = A_3 x, x = A_3^{-1} y. \quad (10)$$

定义 2: 由(10)式所定义的变换称为基于三次 U 系统的全相位双正交 U 变换(APBUT3), 称 A_3 的行向量与 A_3^{-1} 的列向量所组成的向量对为 APBUT3 的对偶基向量, 称 A_3 的行向量为分解基向量、 A_3^{-1} 的列向量为合成基向量. 图 2(a)是大小为 8×8 的 APBUT3 的分解基向量与合成基向量, (b)是大小为 8×8 的 DCT 分解基向量与合成基向量, 与(b)对比可知, APBUT3 的分解基向量、合成基向量的列率特征与 DCT 是相同的, 即变换矩阵 APBUT3 的行向量的列率是逐渐增加的; 因此, APBUT3 是一类新的列率变换矩阵, 可以用它来对

离散信号进行分析与处理。

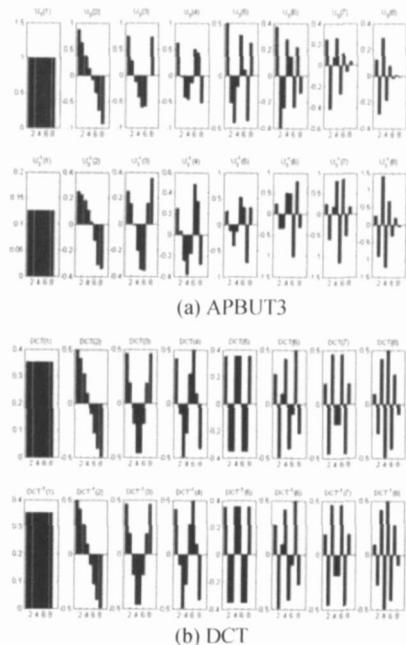


图 2 (a) APBUT3 分解基向量(上)与合成基向量(下)与 (b) DCT 分解基向量(上)与合成基向量(下)图

2.3 二维 APBUT3

假设 $z=f(x, y)$ 是大小为 $M \times M$ 的灰度图像, $A_3 = \{a(m, n)\}_{m,n=0}^{M-1}$ 为 APBUT3 矩阵, 称

$$F = A_3 f A_3^T \tag{11a}$$

与

$$f = A_3^{-1} F (A_3^{-1})^T \tag{11b}$$

为基于三次 U 系统的二维全相位双正交变换(简称为二维 APBUT3), 称(11a)式为二维 APBUT3 的

分解变换, (11b)式为二维 APBUT3 的合成变换.

由(11a)式很容易得到二维 APBUT3 的分解基函数图像为 $\{a(m, x)a(n, y)\}_{x,y,m,n=0}^{M-1}$, 同样可以得到二维 APBUT3 的合成基函数图像. 图 3 是大小为 8×8 的二维 APBUT3 与二维 DCT 的合成基与分解基的二值图像, 由图 3 可以看出, 二维 APBUT3 的分解基与二维合成基的列率从左上角到右下角是逐渐增加的, 因此, 二维 APBUT3(即 APBUT3 的张量积)可以作为一类二维信号处理与分析的列率变换工具, 可以用来对图像进行分析与处理.

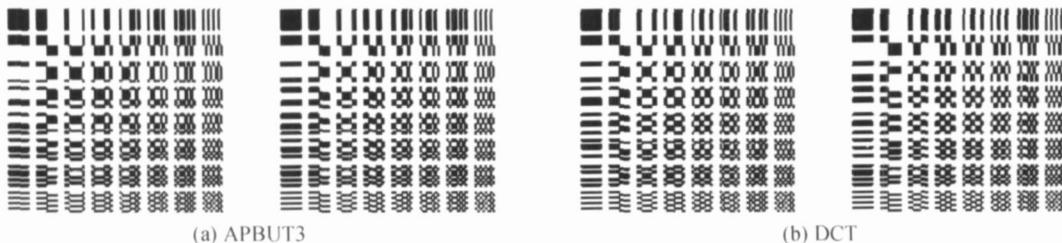


图 3 二维分解基与合成基的二值图像

3 APBUT3 的 JPEG 编码过程

3.1 APBUT3 的编码实施过程

在 JPEG 标准中, 对图像进行变换编码的基本过程是: 先对图像进行分块 DCT 变换, 然后对变换系数进行量化、熵编码, 输出编码后的图像. 这里我们用 APBUT3 作为列率变换矩阵, 用它来代替 DCT 实现图像的静态编码, 其基本过程如图 4 所示.

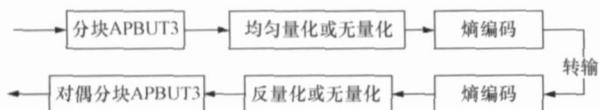


图 4 APBUT3 的图像编码过程

3.2 量化问题

为了压缩图像, 需要对变换系数进行合理的压

缩. 图 5 是大小为 8×8 的二维 APBUT3 与二维 DCT 的合成基与分解基的灰度图像, 其中颜色越深代表二维基函数值越大, 由图 5 可以看出, 二维 APBUT3 的分解基图像的幅度从左上角到右下角是逐渐减小的. 表明用 APBUT3 对图像进行分解时, 对高频分量有抑制作用, 如果对变换系数进行均匀量化, 就相当于对低频分量用较细的量化间隔量化, 对高频分量用较粗的量化间隔量化^[26].

因此, 用均匀的量化间隔量化 APBUT3 的变换系数, 就可以去掉幅值较小的高频分量而达到压缩图像的目的. 而 DCT 的分解基的幅度值没有明显的差别, 为了抑制幅值较小的高频系数, 只能采用不同的量化间隔量化 DCT 的变换系数.

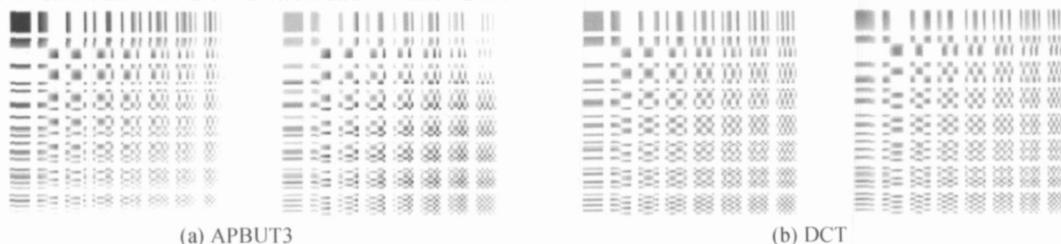


图 5 (a) APBUT3 二维分解基(左)与二维合成基(右)及(b) DCT 二维分解基(左)与二维合成基(右)的灰度图像

3.3 APBUT3 矩阵的优化

为了使 APBUT3 分解图像时能更有效地抑制高频分量, 能量更多地集中在低频分量处, 需要对 APBUT3 矩阵进行优化处理. 采用 (8) 式对 APBUT3 矩阵反复地迭代计算, 使其图像编码效果达到最优^[26], 在迭代过程中, 省略迭代公式前面常数 $\frac{1}{N}$ 和初始值前面的 $\frac{1}{N}$, 即当 $N=8$ 时, 初始值为 (9) 式省略前面的 $\frac{1}{8}$ 后的矩阵元素, 这样便于在量化过程中调整量化间隔. 由此可以得到迭代式

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8750 & 0.7457 & 0.6934 & 0.3079 & -0.0717 & -0.4874 & -1.0181 & -1.0449 \\ 0.7500 & 0.4115 & 0.1143 & -0.6893 & -1.1870 & -0.7645 & 0.4619 & 0.9030 \\ 0.6250 & 0.0032 & -0.6445 & -1.0191 & 0.2223 & 1.1916 & 0.3146 & -0.6930 \\ 0.5000 & -0.3327 & -0.7854 & 0.2005 & 1.0368 & -0.2233 & -0.8917 & 0.4959 \\ 0.3750 & -0.4413 & -0.3533 & 0.8805 & -0.1716 & -0.8584 & 0.8435 & -0.2745 \\ 0.2500 & -0.4247 & 0.1840 & 0.3549 & -0.8537 & 0.7579 & 0.3495 & 0.0811 \\ 0.1250 & -0.2961 & 0.4435 & -0.5688 & 0.4446 & -0.1857 & 0.0434 & -0.0058 \end{pmatrix} \quad (12)$$

3.4 均匀量化过程的 APBUT3 图像编码

假设图像为 f , A_3 为优化后的大小为 8×8 (或 16×16) 的 APBUT3 矩阵, q 为量化因子, 用下面的计算步骤可以实现有量化过程的 APBUT3 图像编码.

(i) 计算图像 f 的 APBUT3 分块变换. 记第 i 行、第 j 列的子图像块为 $f_{i,j}$, 则分块变换为 $F_{i,j} = A_3 f_{i,j} A_3^T$.

(ii) 用给定的量化因子 q 对子图像块的变换系数 $F_{i,j}$ 进行量化, 即用 q 除 $F_{i,j}$ 的每一项; 对量化后的系数取整, 然后按 Zigzag 扫描顺序对子图像块的变换系数进行排序^[27], 去掉每个子图像块后面的零系数, 并加上块结束标志.

(iii) 对变换系数进行 Huffman 编码. 在编码过程中, 直流系数和交流系数统一使用 Huffman 编码; 首先对变换系数进行第一次扫描, 统计出每个变换系数的频率; 然后在第二次扫描中, 对变换系数进行 Huffman 编码. 保存 Huffman 编码的映射表、原始图像大小、子图像块的数目、量化因子、变换系数的最小值、Huffman 码表.

(iv) 解码时, 首先进行 Huffman 解码, 按 Zigzag 扫描顺序逆向排序, 补上必要的零数据; 然后,

$$a^{(n)}(j, k) = \sum_{i=j}^{N-1} a^{(n-1)}(k, i) a^{(n-1)}(k, i-j),$$

其中 $j, k=0, 1, \dots, N-1; n=0, 1, \dots; a^{(n)}(j, k)$ 为 APBUT3 矩阵的第 n 次迭代结果, $a^{(0)}(j, k)$ 为初始 APBUT3 矩阵中的元素. 我们对多幅图像反复地实验、验证, 确定近似最优的 APBUT3 矩阵, 当 $N=8$ 时, (12) 式是 APBUT3 的近似最优矩阵, 即 (9) 式迭代 4 次后的结果, 在这里仍旧用 A_3 表示. 而当 $N=16$ 时, APBUT3 的近似最优矩阵需要迭代 6 次得到.

对解码后的子图像块 $\hat{F}_{i,j}$ 进行反量化, 即 $g_{i,j} = q \hat{F}_{i,j}$; 最后, 对反量化后数据进行逆变换 ($f_{i,j} = A_3^{-1} g_{i,j} (A_3^{-1})^T$), 取整即可得到重构图像 \hat{f} .

3.5 无量化过程的 APBUT3 图像编码

假设图像为 f , A_3 为优化后的大小为 8×8 (或 16×16) 的 APBUT3 矩阵, q 为量化因子, 用下面的计算步骤可以实现无量化过程的 APBUT3 图像编码.

(i) 计算变换矩阵 $U = A_3 / \sqrt{q}$, 然后, 计算图像 f 的 APBUT3 分块变换. 记第 i 行、第 j 列的子图像块为 $f_{i,j}$, 则分块变换为 $F_{i,j} = U f_{i,j} U^T$.

(ii) 对变换系数取整, 然后按 Zigzag 扫描顺序对子图像块排序^[27], 去掉子图像块后面的零系数, 并加上块结束标志.

(iii) 对变换系数进行 Huffman 编码, 编码过程同有量化过程的 APBUT3 图像编码.

(iv) 解码时, 首先进行 Huffman 解码, 按 Zigzag 扫描顺序逆向排序, 补上必要的零数据, 得到相应的子图像块; 然后, 计算对偶变换矩阵 $B \triangleq \sqrt{q} A_3^{-1}$, 对解码后的子图像块 $\hat{F}_{i,j}$ 进行反变换, 即

$\hat{f}_{i,j} = BF_{i,j}B^T$, 取整后即可得到重构图像 \hat{f} .

用变换矩阵的每个元素除以或乘以量化因子 q 的算术平方根后, 再对图像块做分解变换或合成变换, 就相当于用 64(或者 256)次乘法取代变换编码的量化与反量化过程, 简化了图像编码的计算过程.

4 Matlab 仿真实验

在 Windows XP 环境下用 Matlab7.0 对上述编码过程进行仿真实验, 为了便于对比分析, 分别用 APBUT3 与 DCT 对 10 幅大小为 512×512 的灰度图像进行变换编码. 在 DCT 编码过程中, 我们采用常用的大小为 8×8 的 DCT 矩阵对图像做分块变换; 然后用 JPEG 提供的标准量化表对变换系数进行量化、Zig-zag 顺序排序变换系数; 用二次扫描的方式对变换系数进行 Huffman 编码^[27], 即先统计变换系数的频率, 再进行 Huffman 编码. 在 APBUT3 编码过程中, 我们采用无量化过程的 APBUT3 图像编码方法对图像进行变换编码, 并比较了 8×8 分块变换与 16×16 分块变换的 APBUT3 图像编码的效果, 然后, 验证了用均值滤波器对 APBUT3(大小为 16×16)编码重构后的图像进行平滑处理后的效果.

4.1 相同码率下的编码结果

首先取量化因子 $q=1.5$ 和 $q=9$, 对 10 幅图像用 DCT 进行变换编码, 计算出相应的码率、压缩比、峰值信噪比 (PSNR, peak signal to noise ratio), 如表 1 所示. 然后用 APBUT3 对图像进行变换编码, 并调整 APBUT3 的量化因子, 使其码率等于 DCT 的码率, 并计算出 APBUT3 变换编码的压缩比、PSNR.

由表 1 可以看出, 用 8×8 的分块变换对图像进行编码时, DCT 编码的 PSNR 值略优于 APBUT3, 其中图像 Crowd 在码率为 0.7610 时, DCT 的 PSNR 值超过 APBUT3 近 0.6dB, 而对于图像 Woman 来说, 当码率为 0.1215 时, APBUT3 的 PSNR 值超过 DCT 近 0.9dB. 当用 16×16 的 APBUT3 分块变换对图像进行编码时, 其编码效果相对 8×8 的 APBUT3 来说有比较明显地提高, 而相对于 8×8 的 DCT 来说, 当码率较大时, 图像 Peppers, Boat, Bridge, Crowd, Girl, Goldhill 的 DCT 编码结果略优于 APBUT3, 但 PSNR 的最大差值不超过 0.49dB, 图像 Barbara, Lena,

Woman, Zelda 的 APBUT3 编码结果要优于 DCT, 有些图像的 PSNR 值超过 DCT 近 1dB (如图像 Woman, Barbara); 当码率较小时, 所参加测试的 10 幅图像用 16×16 的 APBUT3 编码的结果都优于 8×8 的 DCT, 如图像 Woman 的 PSNR 值提高了 4.5dB, 图像 Zelda 的 PSNR 提高了近 3dB, 图像 Lena, Goldhill, Girl, Peppers 的 PSNR 提高了 1dB 以上.

表 1 相同码率下的 APBUT3 与 DCT 的编码结果

测试图像 512×512	码率/bpp	PSNR/dB		
		DCT (8×8)	APBUT3 (16×16)	APBUT3 (8×8)
Peppers	0.5490	33.7843	33.7491	33.6600
	0.1640	27.6503	29.1043	27.4900
Barbara	0.7600	30.8509	31.8485	30.9455
	0.1785	23.8616	24.2793	23.3660
Boat	0.6925	32.1707	31.9479	31.9906
	0.1736	25.9413	26.5108	25.5600
Bridge	1.0384	28.3535	27.8672	27.9180
	0.2424	23.3772	23.5859	23.0936
Crowd	0.7610	33.6327	33.2249	33.0373
	0.2085	26.2361	27.0998	26.0188
Girl	0.5252	32.4664	32.2840	32.1014
	0.1289	27.8610	29.5681	28.0623
Goldhill	0.6874	32.4066	32.2939	31.8862
	0.1614	26.5392	27.7115	26.4250
Lena	0.5379	34.5855	34.7713	34.2335
	0.1535	27.7833	29.4546	27.7093
Woman	0.3818	38.6413	39.6383	38.3638
	0.1215	30.1072	34.6236	30.9954
Zelda	0.4384	36.5899	37.3147	36.2062
	0.1227	29.0685	32.0509	29.3798

4.2 APBUT3 图像编码的主观效果

由表 1 的实验结果可以知道, 16×16 的 APBUT3 图像编码的 PSNR 值相对于 8×8 的 APBUT3 来说有了较大的提高, 下面我们来考虑 16×16 的 APBUT3 图像编码的主观效果、率失真曲线以及重构图像的后处理过程. 图 6 是图像 Barbara, Zelda, Goldhill, Lena, Peppers, Woman 在相同码率下用 16×16 的 APBUT3 与 8×8 的 DCT 编码重构后的局部图像. 由图 6 可以看出在码率较高情况下, 用 APBUT3 与 DCT 编码重建图像的主观效果基本相同.

图 7 是图像 Barbara, Zelda, Goldhill, Lena, Peppers, Woman 在相同的码率下用 16×16 的 APBUT3 编码重构后的图像与 8×8 的 DCT 编码重构

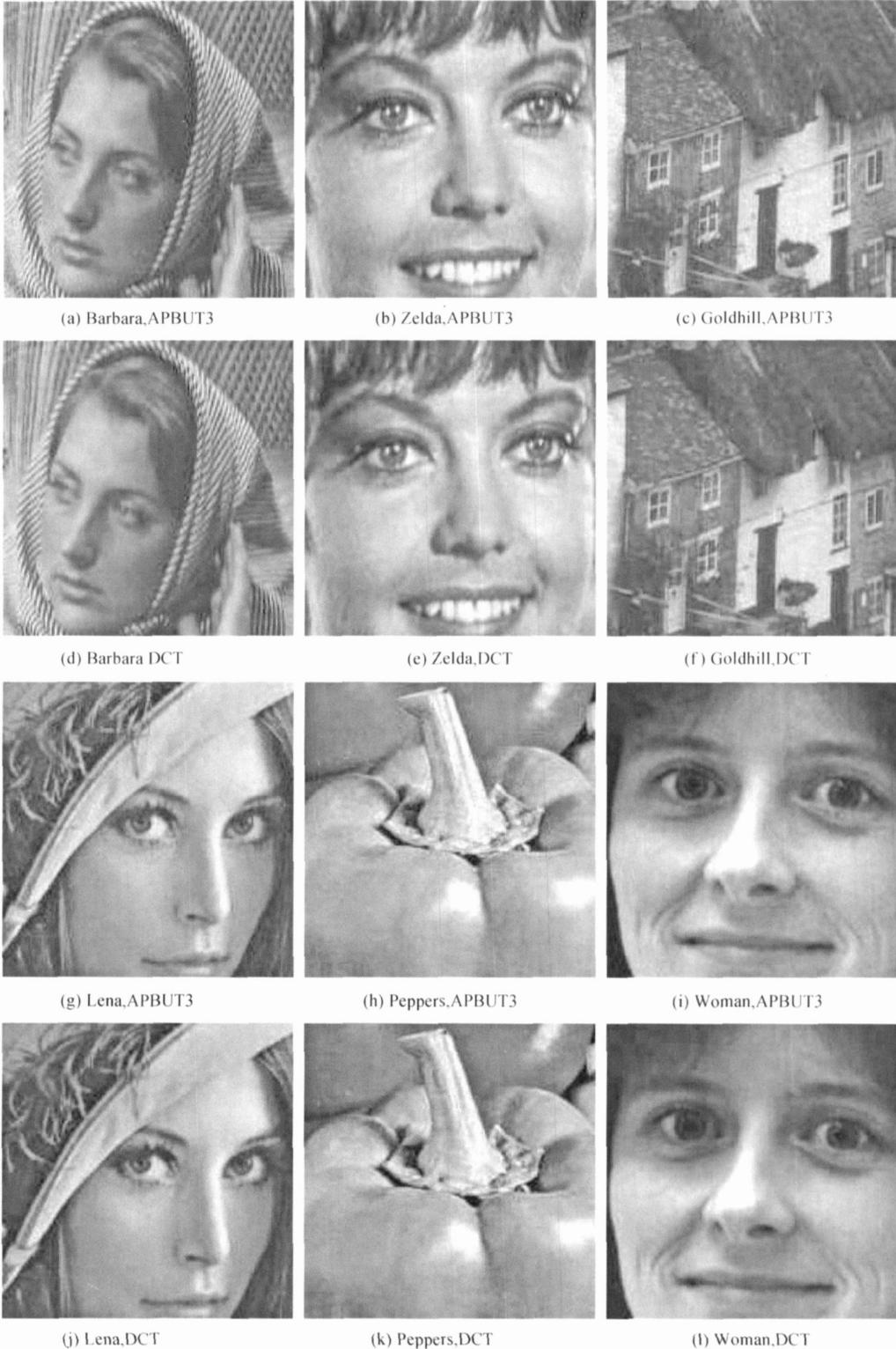


图 6 在高码率下编码重建后的局部图像

Barbara 的码率为 0.7600bpp, Zelda 的码率为 0.4384bpp, Goldhill 的码率为 0.6874bpp, Lena 的码率为 0.5379bpp,

Peppers 的码率为 0.5490bpp, Woman 的码率为 0.3818bpp



图7 在低码率下编码重建后的图像

Barbara的码率为0.1785bpp, Zelda的码率为0.1227bpp, Goldhill的码率为0.1614bpp, Lena的码率为0.1535bpp, Peppers的码率为0.1640bpp, Woman的码率为0.1215bpp

后的图像. 其中 Lena(j), Woman(l), Peppers(k), Barbara(d), Zelda(e), Goldhill(f)是用 DCT 编码重建后的图像, 从图 7 可以看出, 在码率较低的情况下, 用 8×8 的 DCT 编码重建后的图像有明显的雪花斑纹、失真较大; 而用 APBUT3 编码重建图像的方块效应没有 DCT 明显、失真程度比 DCT 小.

4.3 APBUT3 图像编码的后处理

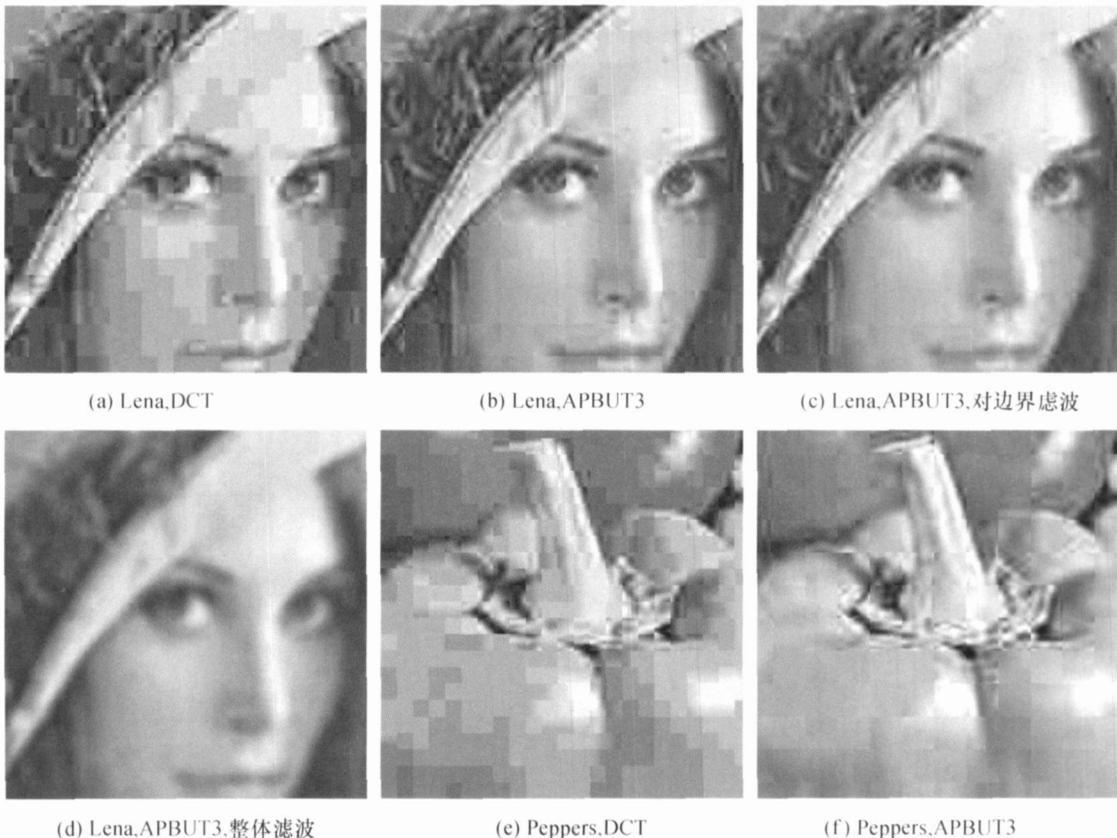
在低码率高压缩比的情况下, APBUT3 编码重建后的图像也有方块效应, 但和 DCT 不同的是, APBUT3 重建图像的方块效应是由“格形”噪声引起的, 即方块内部的失真程度远没有块边界的失真程度大, 其主观效果好像是在“连续”的图像上画了一道道方格形的线条. 我们用 7×7 (或 5×5) 的均值滤波器对块边界平滑处理后, 可以较好地改善重建图像的主观质量, 基本上消除了方块效应.

图 8 中的(a), (e), (i)是图像 Lena, Peppers, Woman 经 DCT 编码重建后的局部图像; (b), (f), (j)是图像 Lena, Peppers, Woman 在相同的码率

下用 APBUT3 编码重建后的局部图像; (c), (g), (k)是(b), (f), (j)用 7×7 均值滤波器对块边界点进行平滑处理后的图像, 处理后的图像已经没有明显的方块效应; (d), (h), (l)是(b), (f), (j)用 7×7 的均值滤波器对整幅图像平滑后的图像, 处理后的图像虽然变得比较模糊, 但它们保留了原始图像的主体轮廓.

4.4 率失真曲线

对表 1 所列的 10 幅图像采用不同的压缩比, 用 16×16 的 APBUT3 与 8×8 的 DCT 进行压缩编码与图像重建. 首先, 取量化因子 $q=1, 1.5, 2, 3, 4, 6.5, 9, 12, 15, 18$, 用 DCT 对图像进行编码与重建, 计算出码率、PSNR; 然后, 用 APBUT3 在相同的码率下对这 10 幅图像进行变换编码, 计算 PSNR. 图 9 是其中六幅图像的率失真曲线, 由此可以看出, 当码率低于 0.4bpp 时, APBUT3 编码结果要优于 DCT, 且码率越低, APBUT3 编码优势越明显.



(a) Lena,DCT

(b) Lena,APBUT3

(c) Lena,APBUT3.对边界滤波

(d) Lena,APBUT3.整体滤波

(e) Peppers,DCT

(f) Peppers,APBUT3

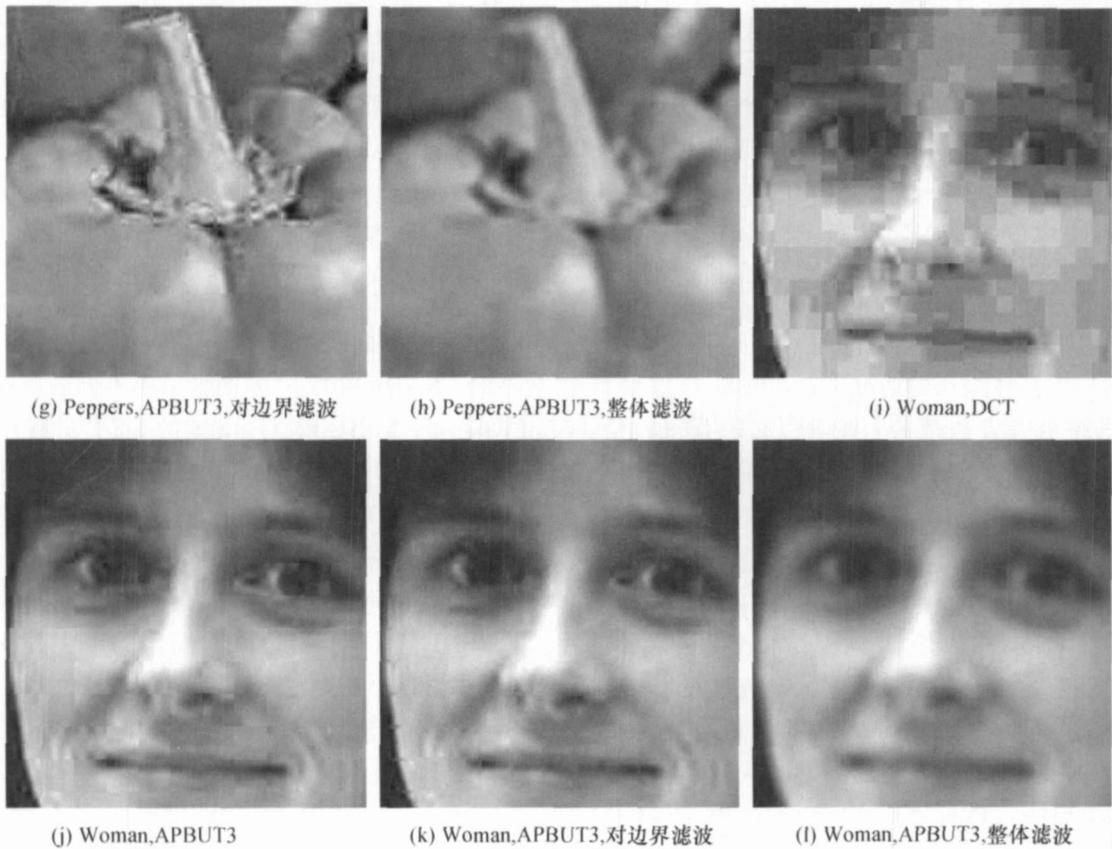


图8 DCT, APUBT3 编码重建、消除方块效应后的局部图像

Lena 的码率为 0.1535bpp, Peppers 的码率为 0.1640bpp, Woman 的码率为 0.1215bpp

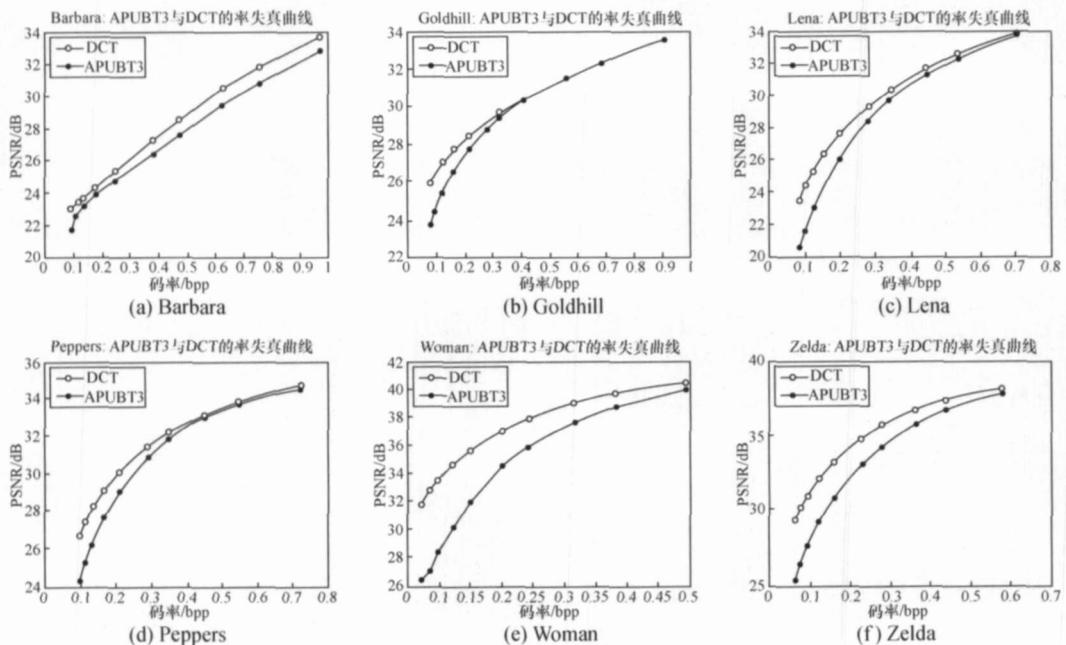


图9 图像编码的率失真曲线

5 结论

本文应用 U 正交函数系与全相位数字滤波器的设计方法, 构造出基于三次 U 系统的全相位双正交变换的 JPEG 图像编码算法, 由于 APBUT3 对图像的高频成分有抑制作用, 因此, 在编码过程中, 可以采用同一量化间隔对变换系数进行量化处理, 或者直接用量化因子对变换矩阵进行量化, 然后用新得到的变换矩阵对图像进行变换编码, 从而可以简化图像编码过程中的复杂的量化过程。

其次, 由于基于 DCT 的图像编码过程的量化表的设计比较复杂, 因此, 实现 16×16 的分块 DCT 图像编码比较困难. 而 APBUT3 图像编码的量化过程简洁, 用 16×16 的 APBUT3 矩阵对图像进行分块变换编码, 实现起来不会存在设计量化表的困难, 因而编码过程容易实现, 并且相对于 8×8 的 APBUT3 来说, 其编码效果有较大提高; 另一方面, 相对于 8×8 的 DCT 来说, 在码率较高的情况下, 该算法的编码效果与 DCT 基本相同, 而在码率较低的情况下, 16×16 的 APBUT3 编码效果明显地优于 DCT, 重构图像的方块效应没有 DCT 明显, 并且用简单的均值滤波器对重构图像进行平滑处理后, 其方块效应能基本消除。

因此, 用基于 16×16 的 APBUT3 分块变换对图像进行压缩编码, 虽然计算量要比 DCT 大, 但不需要构造量化表, 且编码效果要优于 DCT, 后处理方块效应的方法简单, 因此, 用它来替换 DCT 实现静态图像的压缩编码, 应该是一种行之有效的图像编码算法。

参 考 文 献

- Liu SZ, Alan C Bovik. Efficient DCT-domain blind measurement and reduction of blocking artifacts. *IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology*, 2002, 12(12): 1139—1149
- Hyung W Paik, Anil Khubchandani. Quantization scheme for JPEG baseline sequential of still images. In: *Proc of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Washington, DC, 1992, 2: 976—979
- Wu SW, Allen Gersho. Rate-constrained picture adaptive quantization for JPEG baseline coders. In: *IEEE International Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Minneapolis, M.N., 1993, 5: 389—392
- Viresh Ratnakar, Miron Livny. An efficient algorithm for optimizing DCT quantization. *IEEE Trans on Image Processing*, 2000, 9(2): 267—270
- Gao WF, Coskun Memer, Yongmin Kim. A de-blocking algorithm and a blockiness metric for highly compressed images. *IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology*, 2002, 12(12): 1150—1159
- Kiryung Lee, Dong Sik Kim, Taejeong Kim. Regression-based prediction for blocking artifact reduction in JPEG-compressed images. *IEEE Trans on Image Processing*, 2005, 14(1): 36—48
- Malvar HS, Staelin DH. The Lot: Transform coding without blocking effects. *IEEE Trans Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(4): 553—559
- Malvar HS. Bi-orthogonal and nonuniform lapped transform for transform coding with reduced blocking and ringing artifacts. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1998, 46(3): 1043—1053
- 齐东旭, 冯玉瑜. 关于 Fourier-U 级数的收敛性. *中国科技大学学报(数学专辑)*, 1983, (5): 7—17
- 齐东旭, 冯玉瑜. 关于正交完备系 $\{U\}$. *吉林大学自然科学学报*, 1984, (2): 21—31
- Feng YY, Qi DX. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. *SIAM J Math Anal*, 1984, 15(4): 834—844
- 宋瑞霞, 马 辉. 信号多分辨分析的一类新的正交基. *科学与工*, 2005, 5(23): 1807—1812
- Ma H, Song RX, Qi DX. Orthogonal complete U-system and its application in CAGD. In: *The Proc of 1st Korea-China Joint Conference on Geometric and Visual Computing*. Busan, Korea, 2005, 31—36
- Cai ZC, Ma H, Sun W, et al. Analysis of frequency spectrum for geometric modeling in digital geometry. In: *Wavelet Analysis and Applications*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag Basel, 2007, 525—542
- 齐东旭, 陶尘钧, 宋瑞霞, 等. 基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达. *计算机学报*, 2006, 29(5): 778—785
- Song RX, Wang XC, Ma H, et al. V-descriptor and shape similarity measurement between b-spline curves. In: *1st International Symposium on Pervasive Computing and Applications*, Urumqi, 2006, 486—490
- 丁 伟, 闫伟齐, 齐东旭. 基于 U 系统的数字图像水印技术. *中国图像图形学报*, 2001, 6(6): 44—49
- Ding W, Yan WQ, Qi DX. Digital watermarking image embedding based on U-system. In: *Proc of the 6th International Conf on Computer Aided Design & Computer Graphics*, 1999, 3(12): 893—899
- Li ZM, Men XP, Li H. 3D model retrieval based on U system rotation invariant moments. In: *2nd International Conference on Pervasive Computing and Applications*, Birmingham, 2007, 183—188

- 20 Liu YJ, Yao XL, Li ZM, et al. SHREC' 08 entry: 3D model retrieval based on the V system invariant moment. In: IEEE International Conf on Shape Modeling and Applications, Stony Brook, NY, USA, 2008, 249—250
- 21 Li ZM, Men XP, Liu YJ, et al. 3D model retrieval based on V system rotation invariant moments. In: 3rd International Conf on Natural Computation, HaiKou, 2007, 565—569
- 22 侯正信, 王兆华, 杨 喜. 全相位 DFT 数字滤波器的设计与实现. 电子学报, 2003, 31(4): 539—543
- 23 侯正信. 离散余弦列率滤波器的设计及应用. 天津大学学报, 1999, 32(2): 324—328
- 24 侯正信, 高志云, 杨爱萍. 一种基于全相位余弦双正交变换的 JPEG 算法. 中国图像图形学报, 2007, 12(11): 2012—2017
- 25 侯正信, 潘 霞, 王成优. 基于全相位反余弦双正交变换的 JPEG 图像压缩技术. 光电子·激光, 2007, 18(3): 372—375
- 26 侯正信, 王成优, 杨爱萍, 等. 全相位沃尔什双正交变换及其在图像压缩中的应用. 电子学报, 2007, 35(7): 1376—1381
- 27 Rafael C Gonzalez, Richard E Woods, Steven L Eddins. Digital Image Processing Using MATLAB. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005. 7, 317—325